4. Комплекс айнымалыға байланысты функцияның интегралы. Коши теоремасы. Коши түріндегі интеграл.

Комплексті айнымалының функцияларының интегралдауы.

Бірмәнді функция $\omega = f(z)$ анықталған және үздіксіз облыстар D, ал C-үздікті –тегіс тұйықталған немесе төңірегінде жататын тұйықталмаған бағдарланған қисық D. $z = x + iy, \quad f(z) = u + iv$, мұнда $u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$ нақты функциялар айнымалы x және y,

$$\lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta z_k = \int_C f(z)\, dz$$

Функциядан интегралдың есептеуі $\omega = f(z)$, z комплексті айнымалымен координаталар бойынша қисық сызықтың интегралдардың есептеуінде

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - v\, dy + i \cdot \int_C v\, dx + u\, dy$$

Интеграл $\int_C f(z)\, dz$ C-тың интегралдауын тәуелді болады $x = x(t), \quad y = y(t)$

Қисық параметрлік теңдеулерге берілген $t = t_0, \ t = t_1$ болса, бастапқы және қисық соңғы шекті нүктелері параметрдің мәндеріне сәйкес келеді:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt,$$

онда $z(t) = x(t) + i\, y(t)$.

Егер функция $\omega = f(z)$ аналитикалыққа D-ның қисынды облысында.Онда функция интеграл бұдан тәуелді болмағанында емес , тек қана бастапқыдан тәуелді болғанында және шекті нүкте $z_1, z_2 \in D$.Осы жағдайда интегралдың есептеулері үшін Ньютон-Лейбнецтің формуласын колданады;

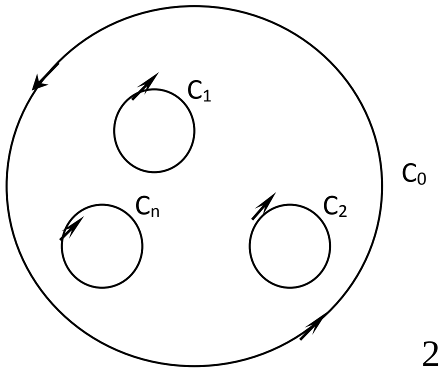
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \quad \text{мұнда } \Phi'(z) = f(z), \ z \in D$$

Егер функция $\omega = f(z)$ бірбайланысты аймақ D аналитикалық болып табылады.Шектелген үздікті тұйықталған контур үзікті C онда бұл облыста нөлге тең. Кез келген тұйықталған қисық пен интеграл:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0 \quad \text{(Коши теоремасы)}$$

Көп жағдайда аймақ:

$$\sum_{k=0}^{n} \oint_{\tilde{N}_k} f(z)\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\tilde{N}_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\tilde{N}_k} f(z)\,dz$$



2-сурет

Кошидің интегралдық формуласы.

Егер функция $f(z)$ облыс D аналитикалық болып табылады. Шектелген үзікті-тұйықталған контур С, онда Каши интегралда формуласы;

$$\oint_{\tilde{N}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0) \qquad (z_0 \in D)$$

Контур С, D облысы әрқашан сол жағында қалады.Егер функция $f(z)$ С және D шекарасында облыста аналитикалық кез келген n үшін формула орын алады:

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

Лоран қатары.

Функция $\omega = f(z)$ бірмәнді және аналитикалығы $0 < r < |z - z_0| < R$ бұл Лоранның қатарында жалғыз тур

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Коэффицентті C_n осы формулалар мен есептеиді;

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Бұл Г – нүктеге z_0 орталығы бар осы сақина ішінде жататын кезкелген шеңбер

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Бұл Лоран қатарының негізгі бөлігі деп аталады, ал

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

қатары Лоран қатарының дұрыс бөлігі деп аталады.

Тәжірибее жүзінде C_n коэффициентін табу үшін, мүмкін болатындай Тейлор қатарының дайын ажыратылған функциясын қолданамыз.